CDI III
PROBLEMAS DE AVALIAÇÃO CONTÍNUA

JORGE BUESCU

CURSOS: FÍSICA, ENG^{a} FÍSICA, ENG BIOMÉDICA

Observação importante!

Estes problemas destinam-se à avaliação contínua dos estudantes. Note-se que os problemas propostos para cada semana estão programados para um investimento de tempo entre as *quatro* e as *seis horas*, nas quais se incluem as duas horas da aula prática.

Isto significa, em particular, que *é errado pensar que o trabalho desenvolvido nas aulas práticas é suficiente para resolver os problemas propostos*. Este método de funcionamento pressupõe o trabalho, individual ou em grupo, dos estudantes fora das aulas — entre duas e quatro horas semanais.

A experiência mostra que o processo mais eficiente para os próprios estudantes é o de comparecer na aula prática tendo já trabalhado em todos os problemas propostos para essa semana e resolvido parte deles, concluindo a sua resolução depois da aula.

Date: 1^{o} semestre de 2009/10.

Parte 3: Séries de Fourier e Equações diferenciais parciais

Tópicos essenciais: Método de separação de variáveis em equações diferenciais parciais. Séries de Fourier: convergência em média quadrática, Teorema de Parseval, conjuntos ortonormados completos. Critérios de convergência. Aplicações às equações do calor, de Laplace e das ondas. Relação com a solução de d'Alembert para a equação das ondas.

Bibliografia essencial: M. Braun, *Differential equations and their applications*. Springer.

(1) Determine a solução dos seguintes problemas de valores iniciais e condições na fronteira (PVIF):

a) $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $x \in (0,2)$, com $\begin{cases} u(0,t) = u(2,t) = 0 \\ u(x,0) = \text{ sen } \left(\frac{\pi x}{2}\right) + 3 \text{ sen } \left(\frac{5\pi x}{2}\right). \end{cases}$

b) $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u$, $x \in (0,L)$, com $\begin{cases} u(0,t) = u(L,t) = 0 \\ u(x,0) = c_1 \text{ sen } \left(\frac{3\pi x}{L}\right) + c_2 \text{ sen } \left(\frac{8\pi x}{L}\right). \end{cases}$

(2) Determine a série de Fourier das seguintes funções nos intervalos indicados:

a) $f(x) = x,\ x \in]-1,1[$.

b) $g(x) = \begin{cases} L - x, \text{ para } 0 \le x \le L; \\ L + x, \text{ para } -L \le x \le 0. \end{cases}$

Utilizando a série obtida num ponto adequado, aproveite para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}.$$

c) $h(x) = x^2,\ x \in [-L, L]$.

Utilizando a série obtida num ponto adequado, aproveite para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

(3) Calcule a série de Fourier da onda sinusoidal rectificada, isto é, de

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{se } \operatorname{sen} x \ge 0, \\ 0 & \text{se } \operatorname{sen} x < 0. \end{cases}$$

(4) a) Calcule, utilizando o Teorema dos Resíduos, os integrais

$$I_n = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{inx}}{5 + 4\cos x} dx, \qquad n = 0, 1, 2 \ldots.$$

b) Deduza, da alínea anterior, os valores de

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos nx}{5 + 4\cos x} dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{sen} nx}{5 + 4\cos x} dx.$$

c) Diga, justificando, qual o valor da soma da série

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx$$

para cada $x \in [-\pi, \pi]$.

(5) a) Mostre que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ for uma função par e $f(x) \neq 0$, então $1/f$ é uma função par. Mesmo problema para funções ímpares.

b) Mostre que, se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ for uma função par diferenciável, então f' é ímpar. Mostre ainda que, se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ for uma função ímpar diferenciável, então f' é par.

(6) Desenvolva a função definida no intervalo $[0, 1]$ por $f(x) = x$:

a) numa série de Fourier que só contenha senos;
b) numa série de Fourier que só contenha cosenos.

(7) Seja a função f definida no intervalo $(0, \pi)$ por $f(x) = \operatorname{sen}(x)$.

(a) Determine a série de Fourier de cosenos da função f.
(b) Diga, justificando, qual o valor da soma da série de Fourier para cada x no intervalo $[-\pi, \pi]$.
(c) Resolva a equação

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 2u, \ x \in (0, \pi) \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \\ u(x, 0) = f(x). \end{cases}$$

(8) Resolva o seguinte PVIF relativo à equação das ondas:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in (0, 1),$$

com $\begin{cases} u(0, t) = u(1, t) = 0 \\ u(x, 0) = 0 \\ u_t(x, 0) = 1. \end{cases}$

(9) Considere a equação de propagação do calor $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. $\quad (*)$

(a) Mostre que esta equação possui uma solução estacionária (isto é, que não depende do tempo) da forma $u(x) = Ax + B$.
(b) Determine a solução estacionária para o problema correspondente a uma barra situada entre os pontos $x = 0$ e $x = L$, em que se fixam as temperaturas $u(0, t) = T_1, \ u(L, t) = T_2$.
(c) Resolva a equação (*) para $0 \le x \le 1$ e para as condições iniciais e de fronteira $\begin{cases} u(0, t) = 20 \\ u(1, t) = 60 \\ u(x, 0) = 75. \end{cases}$

(10) Mostre que, em geral, o problema de valores iniciais e de fronteira

$$\begin{cases} u_t = k u_{xx} + g(x), \quad 0 < x < L \\ u_x(0, t) = \alpha, \quad u_x(L, t) = \beta \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}$$

não possui solução estacionária. Determine a relação que α, β, k, g e L devem satisfazer para que exista solução estacionária. Interprete fisicamente.

(11) Resolva o seguinte problema de valores iniciais e na fronteira:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < \pi \\ u(0,t) = \alpha, \quad u_x(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) = \pi^2 - (\pi - x)^2. \end{cases}$$

Sugestão: Observe que o intervalo de desenvolvimento de $f(x)$ em série de Fourier sugerido pelas condições de fronteira é $[0, 2\pi]$ e não $[0, \pi]$!

(12) Considere o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x), \end{cases} \qquad (*)$$

onde $f(x)$ é uma função contínua em $[0, L]$ e seccionalmente diferenciável em $]0, L[$.

a) Resolva o problema por separação de variáveis quando $f(x) = \cos\left(\frac{3\pi x}{L}\right)$.

b) Mostre, para qualquer f nas condições do problema (*), que para todo o $t > 0$ se tem

$$\int_0^L u(x,t)dx = \int_0^L f(x)dx$$

e que, para todo o $x \in [0, L]$, se tem $\lim\limits_{t \to +\infty} u(x,t) = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_0^L f(s)ds.$

Interprete fisicamente!

(13) Seja $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

a) Realize o desenvolvimento da função $f(x) = \cos \alpha x, \ 0 \leq x \leq \pi$, em série de Fourier de cosenos no intervalo $[-\pi, \pi]$.

b) Aproveite este desenvolvimento, calculado num ponto adequado, para mostrar que

$$\pi \ \text{cotg}\ \pi\alpha = \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2}.$$

Observação: Pode ser-lhe útil recordar as identidades trigonométricas

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right), \quad \text{sen}\ (a+b) = \ \text{sen}\, a \cos b + \ \text{sen}\, b \cos a.$$

$\boxed{\text{Respostas a alguns problemas}}$

2. a) $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n\pi} \operatorname{sen}(n\pi x)$.

   b) $g(x) = \frac{L}{2} + \frac{4L}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{L}$.

   c) $h(x) = \frac{L^2}{3} + \frac{4L^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{L}$.

9. $u(x,t) = 20 + 40x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(n\pi x)\, e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t}$, onde os b_n são os coeficientes do desenvolvimento de $f(x) = 55 - 40x$ em série de senos, isto é,

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(n\pi x) = 55 - 40x.$$

12. $u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{32}{\pi(2n+1)^3} \operatorname{sen}\left(\frac{2n+1}{2} x\right) e^{-(n+1/2)^2 t}$.