CDI III
PROBLEMAS DE AVALIAÇÃO CONTÍNUA

JORGE BUESCU

CURSOS: FÍSICA, ENGª FÍSICA, ENG BIOMÉDICA

Parte 1: Análise Complexa

Tópicos essenciais: estrutura algébrica e topológica; funções elementares; diferenciabilidade e analiticidade — equações de Cauchy-Riemann; Teorema de Cauchy; Teorema de Liouville; Fórmulas Integrais de Cauchy; singularidades isoladas e resíduos; Teorema dos resíduos.

Bibliografia essencial:

M: Ramos, Apontamentos de Análise Complexa (disponíveis na página da disciplina)

J.E. Marsden, *Basic Complex Analysis*, W.H. Freeman and Company, San Francisco, 1973 (última edição: 1998), Capítulos 1 e 2.

R. Churchill e J.W. Brown, *Complex variables and applications*. McGraw-Hill, 6.a ed.

Date: 1^{O} semestre de 2009/10.

Generalidades; forma exponencial;funções elementares

(1) Escreva os seguintes números complexos sob a forma $a + bi$:

$$(a)\ \ (1-2i)^3;\ \ (b)\ \ \frac{2}{3-4i};\ \ (c)\ \ \frac{1+i}{1-i};\ \ (d)\ \ i^n,\ \ n \in \mathbb{N}.$$

(2) Escreva os seguintes números complexos sob a forma polar:

$$(a)\ \ 3;\ \ (b)\ \ 2i;\ \ (c)\ \ 1+i;\ \ (d)\ \ (1+i)^n,\ \ n \in \mathbb{N};\ \ (e)\ \ \sqrt{1+i};\ \ (f)\ \ \sqrt[4]{i}.$$

(3) Esboce os seguintes conjuntos no plano complexo:
   a) $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.
   b) $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\} \equiv \{z \in \mathbb{C} : z = z_0 + re^{i\theta}, 0 \leq \theta < 2\pi\},\ \ z_0 \in \mathbb{C}, r \in \mathbb{R}$.
   c) $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1 + \sqrt{2}i| \leq 3\}$.
   d) $\{z \in \mathbb{C} : z = 1 + i + (1-i)t,\ t \in \mathbb{R}\}$.
   e) $\{z \in \mathbb{C} : |z + i| \leq |z + 1|\}$.
   f) $\{z \in \mathbb{C} : |2z| = |z + 1|\}$.

(4) Calcule todas as soluções das equações
   a) $e^z = -4$;
   b) $\cos z = 2$;
   c) $|e^{i\theta} - 1| = 2$ (interprete geometricamente).

(5) Seja $p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ um polinómio de coeficientes reais — isto é, em que todos os coeficientes $a_k \in \mathbb{R}$.
   a) Mostre que, se $\lambda = a + ib$, com $b \neq 0$, é raiz de $p(z)$ (isto é, verifica $p(\lambda) = 0$), também $\overline{\lambda} = a - ib$ o é.
   b) Conclua que, num polinómio de coeficientes reais, as raízes complexas com parte imaginária não–nula ocorrem sempre em pares complexo–complexo conjugado.
   c) Mostre que um polinómio de $3.^0$ grau que possua uma raiz complexa com parte imaginária não–nula possui três raízes distintas.
   d) Calcule todas as raízes complexas de $z^3 - z^2 + z - 1$.

(6) Utilizando as fórmulas de Euler, determine expressões para $\cos(3\phi)$ e $\sin(3\phi)$ em termos de $\cos(\phi)$ e $\sin(\phi)$.

(7) Calcule o valor principal (i.e., tomando na função $\log z$ o ângulo correspondente à restrição principal) de:

$$(a)\ \ i^i;\ \ (b)\ \ \left(\frac{e}{2}(-1-\sqrt{3}i)\right)^{3\pi i};\ \ (c)\ \ (1-i)^{4i};\ \ (d)\ \ 2^i.$$

(8) Determine as partes real e imaginária das seguintes funções de variável complexa, e indique o conjunto de pontos do plano complexo onde são contínuas:

$$(a)\ \ z;\ \ (b)\ \ z^2;\ \ (c)\ \ \bar{z};\ \ (d)\ \ z\bar{z};\ \ (e)\ \ \frac{1}{z};\ \ (f)\ \ z+\bar{z};\ \ (g)\ \ z-\bar{z}.$$

(9) Estabeleça as seguintes identidades (onde $z = x + iy$):

a) $\sin(iz) = i\sinh(z)$;
b) $|\sin z|^2 = \sin^2(x) + \sinh^2(y)$;
c) $|\cos z|^2 + |\sin z|^2 = 1 + 2\sinh^2 y$;
d) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$;
e) $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$.

Diferenciabilidade, Analiticidade, séries

(10) Mostre que a função de variável complexa definida por $f(x + iy) = x - y + i(x + y)$ é diferenciável no sentido complexo em todo o $\mathbb{C}$, e escreva-a como função da variável complexa z.

(11) Determine as partes real e imaginária das seguintes funções de variável complexa, e indique o conjunto dos pontos do plano complexo onde não possuem derivada:

(a) $x^2 - y^2 + 2ixy$; (b) $x^2 - y + i(x - y^2)$; (c) $x^2y + x + i(x - y^2)$;

(d) ze^z; (e) $\bar{z}e^z$; (f) $\cos(z)$; (g) $\sin(\bar{z})$; (h) $\dfrac{z+1}{z-i}$.

(12) Considere a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = (|z|^2 - 2)\bar{z}$.

(a) Indique o conjunto de pontos do plano complexo onde f é diferenciável no sentido complexo, bem como o seu domínio de analiticidade.

(b) Mostre que f aplica circunferências centradas na origem e de raio r em circunferências centradas na origem de raio r'. Para que valores de r se tem $r = r'$?

(13) Mostre que $f(z) = \sqrt{|xy|}$ possui, na origem, derivadas parciais que verificam as equações de Cauchy-Riemann, mas que f não possui derivada nesse ponto.

(14) Mostre, de duas formas diferentes, que a função $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$ satisfaz a equação de Laplace num aberto de $\mathbb{R}^2$ que não contenha a origem.

(15) Determine a função harmónica conjugada v para as seguintes funções u:

(a) $u = x^2 + xy - y^2$; (b) $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$; (c) $2x - x^3 + 3xy^2$.

(16) Poderá existir uma função analítica cuja parte real seja $u(x, y) = x^2 + y^2$?

(17) Seja f uma função analítica que verifica, num aberto conexo D , $f'(z) = 0$ para todo o $z \in D$. Mostre que f é constante em D (sug.: deve mostrar que tanto a parte real como a parte imaginária de f são constantes enquanto funções das variáveis $x,\ y$).

(18) Calcule os raios de convergência das seguintes séries de potências:
a) $\sum_{n=0}^{\infty} n^p z^n, \ p \in \mathbb{N}$;
b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$;
c) $\sum_{n=0}^{\infty} n! \ z^n$;
d) $\sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2} z^n, \ |q| < 1$;
e) $\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$.

(19) Se a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ tem raio de convergência R, qual o raio de convergência de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{2n}$? E de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 z^n$?

(20) Para que valores de z é a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{1+z}\right)^n$ convergente?

Teorema de Cauchy,série de Taylor, F.I. Cauchy

(21) Calcule, para as curvas Γ e funções f indicadas, os integrais $\int_\Gamma f(z)dz$:
a) $f(z) = e^z$, Γ é o segmento de recta entre $z = \pi i$ e $z = 1$, com esta orientação .
b) $f(z) = e^z$, Γ é constituído pelos segmentos dos eixos coordenados entre os pontos anteriores com a mesma orientação .
c) $f(z) = \dfrac{z+2}{z}$, Γ é o semicírculo $z = re^{i\theta}, \quad r > 0, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$, percorrido no sentido convencional (anti-horário).

(22) Determine o valor do integral $\displaystyle\oint_\Gamma \frac{dz}{z^2-1}$ sobre a linha definida por $|z| = 2$, percorrida no sentido convencional.

(23) Determine os seguintes integrais através das fórmulas integrais de Cauchy (as curvas supõem-se percorridas no sentido convencional):
a) $\displaystyle\oint_\Gamma \frac{\sin z}{z} dz$, onde Γ é a elipse $4x^2 + y^2 = 1$.
b) $\displaystyle\oint_\Gamma \frac{e^{-z}}{z+1} dz$, onde Γ é a curva $|z| = 2$.
c) $\displaystyle\oint_\Gamma \frac{\operatorname{tg} z}{(z-\pi/4)^2} dz$, onde Γ é a curva $|z| = 1$.
d) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^n} dz$.

(24) Integre a série de MacLaurin de $f(s) = 1/(1+s)$ sobre uma curva interior ao círculo de convergência, desde $s = 0$ até $s = z$,

de modo a obter a representação

$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}. \qquad (|z| < 1).$$

(25) Mostre que a função

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\log(z+1)}{z} & \text{se } z \neq 0 \\ 1 & \text{se } z = 0 \end{cases}$$

é analítica no domínio $|z| < 1$.

(26) Seja f uma função inteira. Mostre que, se existem $M > 0$ e um inteiro n tal que $|f(z)| \leq M|z|^n$ para $|z| > |z_0|$, então f é um polinómio de grau $\leq n$. (Sugestão: considere a demonstração dada na aula teórica do Teorema de Liouville).

Nota: Este facto mostra que o módulo de uma função inteira não-polinomial tem de crescer, quando $|z| \to \infty$, mais rapidamente do que qualquer polinómio. Como justifica esta afirmação, por exemplo, no caso $f(z) = \operatorname{sen} z$?

Teorema dos Resíduos, Série de Laurent

(27) Desenvolva $f(z) = (1-z)^{-n}$, n inteiro positivo, em potências de z. Qual a região de convergência da série obtida?

Sugestão: relacione $f(z)$ com a derivada de ordem $n-1$ de $g(z) = (1-z)^{-1}$, e observe que g é a soma da série geométrica.

(28) Considere a função $f(z) = \dfrac{2z+3}{z+1}$. *Sem calcular os respectivos coeficientes*, indique justificadamente qual o raio de convergência do desenvolvimento de f em série de potências de $z-1$.

(29) Mostre que, para $0 < |z| < \infty$, é válido o desenvolvimento em série

$$\frac{e^z}{z^2} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{4!} + \cdots$$

(30) Determine o desenvolvimento em série de Laurent da função $f(z) = \dfrac{1}{z(1-z)^2}$:

a) em torno do ponto $z_0 = 0$;

b) em torno do ponto $z_0 = 1$.

(31) Deduza a representação em série de Laurent

$$z^3 \cosh\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{z}{2} + z^3 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+2)!} \frac{1}{z^{2n-1}}$$

e indique o seu domínio maximal de validade.

(32) Determine todos os valores possíveis do integral $\oint_\Gamma \frac{ze^z}{z^2+a^2}dz$, onde Γ é uma curva de Jordan seccionalmente regular contida no domínio de f e $a \in \mathbb{R}$.

Observação : Note que deve incluir ambos os sentidos de percurso de Γ.

(33) Seja f uma função analítica no ponto z_0. Mostre que a função $g(z) = f(z)/(z-z_0)$ possui em z_0 uma singularidade removível caso $f(z_0) = 0$, e um pólo simples de resíduo $f(z_0)$ caso contrário.

(34) Suponha que $f(z) = h(z)/g(z)$ tem um pólo de ordem 1 em $z = z_0$, sendo h e g analíticas em z_0 e $h(z_0) \neq 0$. Mostre que

$$\mathrm{Res}_{z=z_0} f = h(z_0)/g'(z_0). \tag{1}$$

(35) Seja $f(z)$ uma função analítica num aberto simplesmente conexo D e seja z_0 o único zero de $f(z)$ em D. Mostre que, sendo Γ uma curva de Jordan em D, orientada positivamente, e envolvendo z_0, então

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = m,$$

onde m é a ordem do zero de f.

(36) Determine os resíduos das seguintes funções nas singularidades correspondentes:

$$(a)\ \frac{\cos z}{z^3};\quad (b)\ e^{-1/z^2};\quad (c)\ \frac{1}{1-z};\quad (d)\ \frac{1}{(z^2-1)^2};\quad (e)\ \frac{z^2}{1-z^4}.$$

(37) Estabeleça, através do Teorema dos Resíduos e mediante a escolha de um contorno de integração adequado, os seguintes resultados:

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{2}.$

(b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$ **Sugestão:** utilize a relação (1) do problema 34.

(c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{\pi}{6}.$

(d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{\pi}{4}.$

(e) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax\,dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{2}e^{-|a|},$ para $a \in \mathbb{R}$. **Sugestão:** deve escolher contornos diferentes para os casos $a > 0$ e $a < 0$.

(f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x\,dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{\pi}{(a^2-b^2)}\left(\frac{e^{-b}}{b} - \frac{e^{-a}}{a}\right),$ para $a > b > 0$.

(g) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax\,dx}{(x^2+b^2)^2} = \frac{\pi}{4b^3}(1+ab)e^{-ab},$ para $a > 0,\ b > 0$.

(h) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin ax \; dx}{x^4+4} = \frac{\pi}{2} e^{-a} \sin a, \qquad \text{para } a > 0.$

(i) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5+4\sin\theta} = \frac{2\pi}{3}.$

(j) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+\sin^2\theta} = \sqrt{2}\pi.$

(k) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+a\cos\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}. \qquad (-1 < a < 1).$

(l) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos 2\theta d\theta}{1-2a\cos\theta + a^2} = \frac{a^2\pi}{1-a^2}. \qquad (-1 < a < 1).$

(m) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{(x^2+1)} \, dx = \frac{\pi}{2\,e}.$