

CDI III
PROBLEMAS DE AVALIAÇÃO CONTÍNUA

JORGE BUESCU

CURSOS: FÍSICA, ENG BIOMÉDICA

Observação importante!

Estes problemas destinam-se à avaliação contínua dos estudantes. Note-se que os problemas propostos para cada semana estão programados para um investimento de tempo entre as *quatro* e as *seis horas*, nas quais se incluem as duas horas da aula prática.

Isto significa, em particular, que *é errado pensar que o trabalho desenvolvido nas aulas práticas é suficiente para resolver os problemas propostos*. Este método de funcionamento pressupõe o trabalho, individual ou em grupo, dos estudantes fora das aulas — entre duas e quatro horas semanais.

A experiência mostra que o processo mais eficiente para os próprios estudantes é o de comparecer na aula prática tendo já trabalhado em todos os problemas propostos para essa semana e resolvido parte deles, concluindo a sua resolução depois da aula.

Parte 2: Equações diferenciais ordinárias

Tópicos essenciais: EDOs de primeira ordem: lineares, separáveis, homogêneas, exactas e redutíveis a exactas. Campos de direcções. Teorema de existência e unicidade. Equações escalares lineares de ordem superior à primeira: solução geral, problemas de valores iniciais, matriz Wronskiana, fórmula de variação das constantes. Sistemas de equações diferenciais lineares, exponencial de matrizes, fórmula de variação das constantes.

Bibliografia essencial:

M. Ramos, *Curso elementar de equações diferenciais*. DM-FCUL, 2002.

M. Braun, *Differential equations and their applications*. Springer-Verlag, 1987.

Alguns dos problemas da presente lista foram retirados do livro de M. Braun *Differential Equations and Their Applications*, que contém soluções.

Equações lineares

- (1) Em cada um dos problemas seguintes determine a solução do problema de condição inicial dado. Depois de resolver **verifique que se trata de facto de uma solução substituindo na equação e constatando que esta é satisfeita.**

(a) $\frac{dy}{dt} + \sqrt{1+t^2}y = 0$, $y(0) = \sqrt{5}$.

(b) $\frac{dy}{dt} + ty = 1 + t$, $y(3/2) = 0$.

(c) $\frac{dy}{dt} - 2ty = t$, $y(0) = 1$.

(d) $L\frac{di}{dt} + Ri = V_0$, $i(0) = 0$.

- (2) Determine a solução geral da equação diferencial

$$(1+t^2)\frac{dy}{dt} + ty = (1+t^2)^{5/2}.$$

Depois de resolver **verifique que se trata de facto de uma solução substituindo na equação e constatando que esta é satisfeita.**

Sugestão : Divida ambos os lados da equação por $1+t^2$.

- (3) Numa substância radioactiva, o fenómeno de decaimento é aleatório: todos os núcleos atómicos têm a mesma probabilidade P de decaimento por unidade de tempo, e núcleos distintos comportam-se independentemente.

Suponha que em $t = 0$ existem N_0 núcleos dessa substância. Determine quantos núcleos $N(t)$ existirão no instante t . (Sug.: a probabilidade é, neste caso, o mesmo que a frequência relativa).

- (4) Determine uma solução contínua do problema de condição inicial

$$\dot{y} + y = g(t), \quad y(0) = 0,$$

onde

$$g(t) = \begin{cases} 2 & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{se } t > 1. \end{cases}$$

- (5) Dada uma equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} + a(t)y = f(t)$$

com $a(t)$ e $f(t)$ contínuas em $-\infty < t < \infty$, $a(t) \geq c > 0$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$, mostre que todas as soluções tendem para zero quando $t \rightarrow +\infty$.

- (6) Um circuito
- RL
- ao qual se aplica, em
- $t = 0$
- , uma tensão sinusoidal de frequência
- ω
- corresponde ao problema de valores iniciais

$$\begin{cases} L \frac{di}{dt} + Ri = V_0 \operatorname{sen}(\omega t) \\ i(0) = 0, \end{cases}$$

onde $R > 0$ e $L > 0$ são resp. a resistência e indutância do circuito.

- (a) Mostre que

$$i_p(t) = V_0 / \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \operatorname{sen}(\omega t - \alpha),$$

onde $\alpha = \cos^{-1}(R/\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2})$, é solução particular (note que, para verificar que algo é solução, basta substituir na equação e verificar que esta é satisfeita).

- (b) Mostre que, quando
- $t \rightarrow +\infty$
- , todas as soluções da equação se aproximam de
- $i_p(t) = V_0 / \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \operatorname{sen}(\omega t - \alpha)$
- , onde
- $\alpha = \cos^{-1}(R/\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2})$
- (sug.: considere a diferença entre
- $i_p(t)$
- e outra qualquer solução).

- (7) Em cada um dos problemas seguintes determine o comportamento de todas as soluções da equação diferencial dada quando
- $t \rightarrow t_0$
- .

$$(a) \frac{dy}{dt} + \frac{1}{t}y = \frac{1}{t^2}, \quad t_0 = 0.$$

$$(b) \frac{dy}{dt} + y \operatorname{tg} t = \sin t \cos t, \quad t_0 = \frac{\pi}{2}.$$

- (8) O modelo mais simples para evaporação de uma gota de água esférica é supor que a diminuição de volume da gota se processa a uma taxa proporcional à sua superfície.

- (a) Qual o tempo necessário para que uma gota de raio
- R_0
- se evapore completamente?

- (b) Se supusermos que a taxa de diminuição de volume da gota é proporcional ao
- quadrado*
- da sua superfície, quanto tempo demora uma gota de raio
- R_0
- a evaporar-se completamente?

- (c) Em face das respostas anteriores, qual dos dois modelos é mais realista?

Equações não-lineares de 1.a ordem

- (9) Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais. Depois de resolver **verifique que se trata de facto de soluções substituindo na equação e constatando que esta é satisfeita.**

(a) $(1 + t^2) \frac{dy}{dt} = 1 + y^2$

(Sugestão: $\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$).

(b) $\frac{dy}{dt} = 1 - t + y^2 - t y^2$.

- (10) Nas alíneas seguintes determine a solução do problema de valor inicial e o intervalo de existência de cada solução. Depois de resolver **verifique que se trata de facto de uma solução substituindo na equação e constatando que esta é satisfeita.**

(a) $\cos y \frac{dy}{dt} = \frac{-t \sin y}{1 + t^2}$, $y(1) = \frac{\pi}{2}$.

(b) $\frac{dy}{dt} = \frac{2t}{y + y t^2}$, $y(2) = 3$.

- (11) Toda a equação diferencial da forma $\dot{y} = f(y)$ é separável. Estas equações diferenciais de 1.ª ordem em que o tempo não aparece explicitamente dizem-se *autónomas*. Todas elas podem, em princípio, ser resolvidas. Suponha agora que temos uma equação diferencial da forma $\frac{dy}{dt} = f\left(\frac{y}{t}\right)$, como por exemplo $\frac{dy}{dt} = \sin\left(\frac{y}{t}\right)$. Estas equações dizem-se *homogéneas*. O facto de o membro esquerdo da equação depender apenas do quociente $\frac{y}{t}$ sugere que se faça a substituição $v = \frac{y}{t}$, ou seja $y = vt$.

- (a) Mostre que esta substituição transforma $\frac{dy}{dt} = f\left(\frac{y}{t}\right)$ na equação equivalente $t \frac{dv}{dt} + v = f(v)$, que é separável.

- (b) Determine a solução geral da equação $\frac{dy}{dt} = 2 \frac{y}{t} + \left(\frac{y}{t}\right)^2$. Depois de resolver **verifique que se trata de facto de uma solução substituindo na equação e constatando que esta é satisfeita.**

- (12) É possível mostrar, a partir das leis de Newton, que um cabo suspenso em dois pontos (como por exemplo um cabo eléctrico ou uma catenária de comboio) tem de assumir uma forma dada pela equação

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Vamos resolver esta equação tomando para origem $(x, y) = (0, 0)$ o ponto de altura mínima do cabo (ver fig. 1). Nestas condições, $y(0) = \frac{dy}{dx}(0) = 0$.

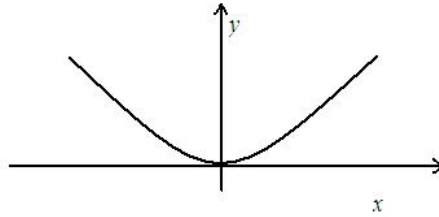


FIGURE 1. Escolha de eixos para descrever a catenária.

- (a) Fazendo $z = \frac{dy}{dx}$, resolva a equação correspondente para z , notando que $z(0) = 0$.
- (b) Integre a expressão anterior tendo em conta que $y(0) = 0$ e esboce o gráfico da função obtida.

Obs. A curva que encontramos chama-se *catenóide* (do latim *catena*, cadeia, corrente): é a forma assumida por uma corrente ou um cabo suspenso por dois pontos, e daí o nome catenária.

- (13) Determine todas as soluções das seguintes equações homogêneas. Depois de resolver verifique que o são substituindo as expressões obtidas na equação e constatando que esta é satisfeita.
 - (a) $y^2 + x(x - y)y' = 0$.
 - (b) $x^2 - y^2 + 2xyy' = 0$.
 - (c) $(x^2 + xy)y' = x\sqrt{x^2 - y^2} + xy + y^2$.
- (14) Determine a solução geral das seguintes equações. Depois de resolver confirme que são soluções substituindo na equação e verificando que esta é satisfeita.
 - (a) $2ty \frac{dy}{dt} = 3y^2 - t^2$.
 - (b) $\frac{dy}{dt} = \frac{t + y}{t - y}$.
- (15) Considere a equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = \frac{at + by + m}{ct + dy + n},$$

onde a, b, c, d, m e n são constantes.

- (a) Mostre que a equação acima pode ser, por meio de mudanças de variável adequadas, reduzida a $\frac{dy}{dt} = \frac{at + by}{ct + dy}$ se $ad - bc \neq 0$.

- (b) Determine a solução geral no caso particular $ad - bc = 0$.
- (16) Existem muitas espécies cujas taxas de natalidade *não* são proporcionais à dimensão da população. Suponhamos, por exemplo, que a reprodução é sexuada: cada membro da população necessita de acasalar para se reproduzir, para o que depende de encontrar um parceiro. Seja $N(t)$ a população total. O número de encontros entre machos e fêmeas deve ser proporcional ao produto do número total de machos pelo número total de fêmeas. Como cada um destes é proporcional a $N(t)$, o número de nascimentos por unidade de tempo é proporcional a $N^2(t)$.

Por outro lado, a taxa de mortalidade, número de indivíduos que morrem por unidade de tempo, é proporcional a $N(t)$ — pois é um fenómeno individual, não dependendo de encontros entre indivíduos.¹

A dimensão da população $N(t)$ satisfaz portanto a equação diferencial

$$\frac{dN}{dt} = bN^2 - aN, \quad a, b > 0.$$

Mostre que, se $N(0) < a/b$, então $N(t)$ tende para 0 quando $t \rightarrow \infty$. Ou seja, assim que a população é inferior ao nível crítico a/b a espécie tende para a extinção.

Obs. Uma espécie animal cuja população está próxima do nível crítico a/b é classificada *em vias de extinção*.

- (17) Um objecto de massa m é projectado verticalmente para baixo com uma velocidade inicial V_0 num meio que oferece uma resistência proporcional à raiz quadrada da velocidade escalar.
- (a) Encontre a relação entre a velocidade V e o tempo t se a força de atrito for igual a $c\sqrt{V}$.
- (b) Calcule a velocidade terminal do objecto. Sugestão : Não é necessário explicitar $V(t)$.
- (18) Um corpo de massa m é lançado verticalmente da superfície da Terra com uma velocidade inicial V_0 . Considere a expressão $y(t)$ do movimento num referencial unidimensional perpendicular à superfície da Terra com origem nesta e orientado para o exterior da Terra. Não havendo resistência do ar, mas contando com a variação do campo gravitacional da Terra com a altitude, obtemos

$$m \frac{dV}{dt} = - \frac{mgR^2}{(y+R)^2},$$

onde R é o raio da Terra.

¹Excepto em circunstâncias excepcionais que pode ter interesse modelar especificamente, como guerra ou propagação epidémica de uma doença com elevada taxa de mortalidade (não é o caso da gripe A!).

- (a) Seja $V(t) = v(y(t))$. Determine a equação diferencial satisfeita por $v(y)$.
- (b) Calcule a menor velocidade inicial V_0 para a qual o corpo não regressa à Terra. Esta é a denominada *velocidade de escape*. Sugestão : As “velocidades de escape” correspondem a soluções $v(y)$ que permanecem estritamente positivas.
- (19) Um resíduo industrial é despejado num tanque com 1000 litros a uma taxa de 1 l/min. e a mistura bem homogénea é evacuada à mesma taxa.
- (a) Calcule a concentração de resíduos no tanque no para $t > 0$.
- (b) Quanto tempo leva esta concentração a atingir os 20%?
- (20) Calcule curvas ortogonais às famílias de curvas dadas:
- (a) $y = cx^2$
- (b) $y = c \sin x$
- (c) $y^2 - x^2 = c$
- (21) Em cada um dos problemas seguintes determine a solução geral da equação diferencial dada:
- (a) $2t \sin y + y^3 e^t + (t^2 \cos y + 3y^2 e^t) \frac{dy}{dt} = 0$.
- (b) $\frac{y^2}{2} - 2y e^t + (y - e^t) \frac{dy}{dt} = 0$.
- (22) Resolva o problema de condição inicial

$$\begin{cases} 3ty + y^2 + (t^2 + ty)y' = 0 \\ y(2) = 1. \end{cases}$$

- (23) Calcule todas as funções $f(t)$ tais que a equação diferencial

$$y^2 \sin t + y f(t) \frac{dy}{dt} = 0$$

seja exacta. Resolva a equação para essas funções f .

- (24) Chama-se *equação de Bernoulli* a uma EDO da forma

$$\frac{dy}{dt} + a(t)y = b(t)y^n.$$

Determine a solução geral desta equação. Sugestão: divida ambos os lados por y^n e mediante a mudança de variáveis $u = y^{1-n}$ transforme-a numa equação linear em u .

- (25) Resolva a equação de Bernoulli $y' + y \sin(t) + y^n \sin 2t = 0$. Depois de resolver confirme que se trata da solução, substituindo na equação e verificando que esta é satisfeita.

(26) Para cada uma das seguintes equações diferenciais, esboce o campo de direções e trace os respectivos tipos de soluções.

(a) $y' = t^2 + y^2$

(b) $y' = \frac{ty}{1+t^2}$,

(c) $y' = (1-y)(2-y)$,

(d) $y' = y(y^2 - 1)$,

(e) $y' = \cos(y-t)$,

(f) $y' = \frac{y+t}{y-t}$,

(g) $y' = -\frac{4y-6t}{y-3t}$.

EDOs de ordem superior à primeira

- (27) É possível mostrar, a partir das leis de Newton, que um corpo no interior da Terra é atraído para o centro com uma força proporcional à sua distância ao centro da Terra; a contante de proporcionalidade é dada por $k = \frac{2}{3}\pi GM_T/R_T^3$, onde G é a constante de Newton, M_T a massa da Terra e R_T o raio da Terra.
- (a) Deduza a equação do movimento de uma pessoa que cai num buraco que atravessa a Terra passando pelo seu centro.
- (b) Ao fim de quanto tempo essa pessoa atingirá os antípodas? Tome $G = 6,7 \times 10^{-11} \text{ m}^3\text{s}^{-2}\text{kg}^{-1}$, $R_T = 6400 \text{ km}$, $M_T = 6,0 \times 10^{24} \text{ kg}$.
- (28) Determine uma equação diferencial de 2.^a ordem que tenha como soluções a família dada:
- (a) $y(t) = At + Bt^2$,
- (b) $y(t) = (A + Bt)e^t$
- (29) Considere a equação diferencial $y'' - 2y' + 2y = 0$.
- (a) Determine a solução geral da equação .
- (b) Esboce as soluções que satisfazem $y(0) = 0$.
- (30) Determine a solução geral da EDO $y'' - 4y' + 4y = 0$.
- (31) Qual é o menor inteiro $n > 0$ para o qual a equação diferencial

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0$$

tem entre as suas soluções as funções $\sin 2t$, $4t^2 e^{2t}$, $-e^{-t}$?
 Determine constantes $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ para que tal aconteça.

- (32) Determine a solução geral da EDO $y'' - y' - 2y = e^{3t}$.
- (33) Determine a solução geral da EDO $y'' + 4y' + 4y = \cos(2t)$.
- (34) Determine todas as soluções da equação

$$y'''(t) - y''(t) + y'(t) - y(t) = \sin t$$

que satisfazem a condição $y(0) = 1$.

- (35) Resolva, para $\omega \neq 0$, o problema de valores iniciais

$$\begin{cases} y''(t) + \omega^2 y(t) = \cos \omega t \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Esta equação possui alguma solução limitada em $[0, +\infty)$? Justifique.

- (36) Determine a solução geral da equação

$$t^2 y''(t) + t y'(t) - 4y(t) = 0$$

sabendo que $y_p(t) = t^{-2}$ é solução particular.

Sistemas de EDO de 1.a ordem

(37) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Determine os valores próprios de A .
 (b) Determine uma matriz S que diagonalize A .
 (c) Calcule e^{tA} .
 (d) Determine a solução de

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \frac{dx}{ds} \\ \frac{dy}{ds} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \end{cases}$$

(e) Esboce o retrato de fase do sistema.

(38) Para cada uma das matrizes A dadas, determine e^{At} :

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ (f) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(39) Dois blocos idênticos, de massa m , estão ligados por três molas idênticas, de constante elástica k , do modo indicado na figura. As paredes estão fixas, tendo por abcissas resp. $x = 0$ e $x = L$. Designe por $x_1(t)$ e $x_2(t)$, respectivamente, as posições dos blocos 1 e 2.

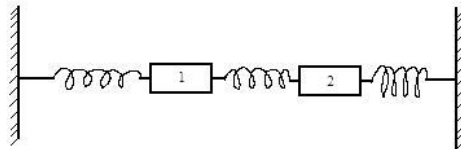


FIGURE 2. Sistema massas-molas do problema 39.

- (a) Mostre que as leis de Newton conduzem às equações diferenciais

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + k(2x_1 - x_2) = 0 \\ m\ddot{x}_2 + k(2x_2 - x_1 - L) = 0 \end{cases}$$

- (b) Mostre que as equações anteriores admitem uma (única) solução independente do tempo, ou seja, de equilíbrio, dada por $x_1 = L/3$, $x_2 = 2L/3$.
- (c) Realizando a mudança de variáveis $y_1 = x_1 - L/3$, $y_2 = x_2 - 2L/3$, $y_3 = m\dot{x}_1$, $y_4 = m\dot{x}_2$, mostre que as equações do movimento conduzem ao sistema de 1.^a ordem

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m} \\ -2k & k & 0 & 0 \\ k & -2k & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}.$$

- (d) Determine a solução geral do sistema anterior, mostrando que ela é a sobreposição de duas oscilações de frequências $\omega_1 = \sqrt{k/m}$ e $\omega_2 = \sqrt{3k/m}$.

Obs. Aquilo que acabou de realizar chama-se em Física a determinação dos *modos normais* do sistema. O estudante interessado poderá considerar o seguinte problema: como se alteram as frequências dos modos normais se as molas e/ou as massas não são idênticas? Qual o efeito de incluir termos de amortecimento?

- (40) Determine a solução geral de cada um dos seguintes sistemas de equações diferenciais:

$$(a) \begin{cases} x'_1 = x_1 \\ x'_2 = x_1 + 2x_2 \\ x'_3 = x_1 - x_3 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x'_1 = -x_1 + x_3 \\ x'_2 = 3x_2 \\ x'_3 = -x_1 - x_3 \end{cases},$$

$$(c) \begin{cases} x'_1 = -2x_2 \\ x'_2 = x_1 + 2x_2 \end{cases} \quad (d) \begin{cases} x'_1 = x_1 \\ x'_2 = 2x_1 - 3x_3 \\ x'_3 = x_1 + 3x_2 + 2x_3 \end{cases}.$$

- (41) Determine uma matriz 2×2 , A , tal que uma das soluções de $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ seja

$$\mathbf{x}(t) = (e^{2t} - e^{-t}, e^{2t} + 2e^{-t}) .$$

- (42) Resolva os seguintes sistemas de equações diferenciais:

$$(a) \begin{cases} x'_1(t) = x_1(t) + e^t \\ x'_2(t) = x_1(t) + 2x_2(t) + \sin t \\ x'_3(t) = x_1(t) - x_3(t) - te^{-2t} \end{cases},$$

$$(b) \begin{cases} x'_1(t) = -2x_2(t) + t^2 \\ x'_2(t) = -x_1(t) + 2x_2(t) + e^t \end{cases} .$$

(43) Resolva o sistema

$$\begin{cases} x' + 2x - y = 2e^{2t} \\ y' + 3x - 2y = 6e^{2t} \end{cases}$$

(44) Resolva os sistemas

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} e^{3t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix}$$

Sugestão: Reduza cada sistema a uma equação escalar dependente apenas de uma variável.

Existência e unicidade (Teorema de Picard-Lindelöf)

(45) Construa as iteradas de Picard para o problema de condição inicial

$$y' = 2t(y + 1), \quad y(0) = 0$$

e mostre que elas convergem para a solução $y(t) = e^{t^2} - 1$.

(46) Resolva as seguintes equações diferenciais utilizando as iteradas de Picard:

(a) $y' = -2ty$ com $y(0) = 1$.

(b) $y' = \sqrt{y-1} + t$ com $y(0) = 1$. Sugestão : Apos o cálculo das duas primeiras iteradas deve estar em condições de adivinhar a forma da solução .

(47) Considere o problema de condição inicial

$$y' = t^2 + y^2, \quad y(0) = 0$$

e seja R o retângulo $0 \leq t \leq a$, $-b \leq y \leq b$.

(a) Mostre que a solução $y(t)$ deste problema existe para

$$0 \leq t \leq \min \left(a, \frac{b}{a^2 + b^2} \right).$$

(b) Mostre que o valor máximo de $\frac{b}{a^2 + b^2}$, com a fixo, é $\frac{1}{2a}$.

(c) Mostre que $\alpha = \min \left(a, \frac{1}{2a} \right)$ é máximo quando $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

(d) Conclua que a solução $y(t)$ do problema acima existe no intervalo $0 \leq t \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

(48) Mostre que $y(t) = -1$ é a única solução do problema de condição inicial

$$\begin{cases} y' = t(1 + y) \\ y(0) = -1 \end{cases}.$$

- (49) (a) Verifique que $y(t) = 1$ é solução do problema de condição inicial

$$\{ y' = t \sqrt{1 - y^2}, \quad y(0) = 1. \ .$$

- (b) Determine uma outra solução deste mesmo problema de condição inicial. Depois de resolver confirme que se trata de uma solução substituindo na equação e verificando que esta é satisfeita, bem como o valor inicial.
- (c) Os factos anteriores contradizem o teorema de Picard-Lindelöf? Justifique.