MECÂNICA RACIONAL
PROBLEMAS PARA AS AULAS PRÁTICAS

JORGE BUESCU

RESUMO. Problemas sobre Sistemas Dinâmicos.

4.1 Considere o sistema dinâmico dado por

$$\begin{cases} \dot{x} &= (1 - x^2 + y^2)x + y \\ \dot{y} &= (1 - x^2 + y^2)y - x. \end{cases}$$

(1) Determine os pontos fixos do sistema e a sua estabilidade.
(2) Considere a função energia $E(t) = x^2(t) + y^2(t)$. Mostre que para $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ suficientemente pequeno se tem $\frac{dE}{dt} > 0$ e para r suficientemente grande $\frac{dE}{dt} < 0$.
(3) Realize uma transformação para coordenadas polares e escreva o sistema nestas coordenadas.
(4) Considerando a secção de Poincaré $I = \mathbb{R}^+$, determine a aplicação de Poincaré $\phi : I \to I$. Determine os pontos fixos de ϕ e a sua estabilidade. O que implicam estes factos para o retrato de fase?
(5) Com base nos pontos anteriores, esboce o retrato de fase do sistema.

3.2 *Equações de Lorenz.* Considere o sistema de equações diferenciais ordinárias (EDOs)

$$\begin{cases} \dot{x} &= 10(y - x) \\ \dot{y} &= -x\,z + r\,x - y \\ \dot{z} &= x\,y - \frac{8}{3}z, \end{cases}$$

onde r é um parâmetro real, $0 < r < 30$.

(1) Determine os pontos de equilíbrio do sistema, bem como a sua estabilidade linear.

(2) Para cada um dos pontos de equilíbrio esboce o retrato de fase numa vizinhança do equilíbrio.

(3) (Para esta alínea necessitará de um computador com acesso a Internet). Procure uma applet que simule computacionalmente o sistema de Lorenz; pode encontrar exemplos em

http://www.geom.uiuc.edu/ worfolk/apps/Lorenz/
http://crossgroup.caltech.edu/chaos_new/Lorenz.html
http://www.ibiblio.org/e-notes/VRML/Lorenz/Lorenz.htm

Corra as applets para os valores relevantes do parâmetro r. O que conclui sobre o comportamento das órbitas do sistema?

4.3 *Sistema de Hénon-Heiles.* Considere o sistema a dois graus de liberdade (x, y) com Hamiltoniano $H(x, y) = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + V(x, y)$, cujo potencial

$V(x, y)$ é dado por

$$V(x,y) = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + 2x^2y - \frac{2y^3}{3}\right)$$

(1) Mostre que existem apenas quatro pontos de equilíbrio e represente-os no plano (x, y). Esboce também algumas curvas equipotenciais no plano (x, y).
(2) Mostre por linearização que um dos pontos de equilíbrio é estável e os outros três instáveis. Como se caracteriza $V(x, y)$ em torno de cada um dos equilíbrios?
(3) Mostre que o movimento é limitado se a energia total $E < 1/6$ e ilimitado se $E > 1/6$ (sugestão: $E > V$ para energias cinéticas positivas. $E = V$ é um ponto crítico do movimento. Construa o gráfico de $V(0, y)$ em função de y).

4.4 *Standard map.* A aplicação standard, estudada na aula teórica, corresponde à secção de Poincaré de um sistemna Hamiltoniano e é dado por

$$\begin{cases} \phi_{n+1} &= \phi_n + J_{n+1}, \\ J_{n+1} &= J_n + \epsilon \sin \phi_n. \end{cases}$$

(1) Mostre que o Jacobiano desta alicação é 1, e portanto a aplicação preserva área.

(Para as próximas alíneas necessitará de um computador com acesso a Internet). Procure uma applet que simule computacionalmente o standard map; pode encontrar exemplos em

http://www.dynamical-systems.org/twist/Applet.html
http://www.ibiblio.org/e-notes/Chaos/stdmap.htm
http://brain.cc.kogakuin.ac.jp/ kanamaru/Chaos/e/Standard/

(2) Faça o retrato de fase do sistema para vários valores de ϵ entre 0 e 0,6. Para cada valor de ϵ dê várias condições iniciais. Observe a forma como se vão quebrando os toros invariantes, criando conjuntos de pontos elípticos-hiperbólicos. Explique qualitativamente o que se passa nas zonas caóticas.

(3) Continue a aumentar ϵ. O último toro invariante (toro KAM) desaparece para $\epsilon = 0.9716...$ (e o seu número de rotação é o número de ouro); depois da quebra deste toro existe caos global. Verifique estes factos na applet com que está a trabalhar.

Dep. Matemática, FCUL, Portugal
E-mail address: jbuescu@ptmat.fc.ul.pt