

2º EXAME DE MECÂNICA RACIONAL
CURSO DE MATEMÁTICA

4 de Fevereiro de 2009

Duração do Exame: 3h.

I

Um ponto material de massa m move-se ao longo do eixo dos xx' sob a acção de uma força conservativa com potencial dado por

$$V(x) = \frac{\log(1+x^2)}{1+x^2}.$$

- a) Determine as posições de equilíbrio e discuta a sua estabilidade.
- b) Determine *justificadamente* todos os movimentos periódicos, bem como o respectivo período (não tente calcular o integral correspondente), e todos os movimentos não-limitados.
- c) Esboce o retrato de fase do sistema.

II

Suponha que um ponto material de massa m , sujeito a um campo gravitacional vertical, se move sobre uma superfície $z = f(x^2 + y^2)$ com simetria de revolução em torno do eixo dos zz' .

- (1) Escreva o Lagrangiano do sistema, e mostre que este é invariante por rotações em torno do eixo zz' (sugestão: pode ser-lhe útil neste ponto utilizar coordenadas cilíndricas).
- (2) Designando por R_θ o grupo de transformações correspondente à rotação por θ em torno do eixo zz' , calcule o respectivo gerador infinitesimal G_θ . Determine a constante de Noether correspondente à invariância de rotação. Qual o significado físico desta constante do movimento?
- (3) Determine as equações do movimento do sistema.

III

Um fio de comprimento l com dois pontos materiais, ambos de massa m , em cada pontapassa por um orifício num plano horizontal sem atrito. Uma das massas move-se sobre o plano e a outra está suspensa verticalmente.

- a) Mostre que um Hamiltoniano adequado para o sistema é

$$H = \frac{p_r^2}{4m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} - mg(l-r),$$

onde (r, θ) são as coordenadas polares do ponto material no plano e p_r, p_θ os momentos correspondentes.

- b) Identifique duas constantes do movimento.
- c) Mostre que, para qualquer r_0 , existe um movimento uniforme e estável com $r = r_0$, para um valor de p_θ apropriado.

IV

As equações do modelo SIR para transmissão de uma doença infecciosa são

$$\begin{cases} \dot{S} &= -a S I \\ \dot{I} &= a S I - b I \\ \dot{R} &= b I \end{cases}$$

onde $S(t)$, $I(t)$, $R(t)$ designam respectivamente os indivíduos susceptíveis à doença, infectados e recuperados.

- a) Mostre que a população global $N = S + I + R$ permanece constante, e que portanto podemos estudar as variáveis (S, I) num plano de fase projectado.
- b) Mostre que, neste plano de fase reduzido, uma curva integral com valores iniciais S_0, I_0 tem por equação

$$I(S) = I_0 + S_0 - S + \frac{b}{a} \log(S/S_0).$$

- c) Utilizando a função $I(S)$, mostre que uma epidemia apenas pode ocorrer se o número de susceptíveis S_0 na população exceder o nível de limiar b/a e que a doença deixa de se propagar por falta de infectados e não por falta de susceptíveis.
- d) Para a trajectória que corresponde a $S_0 = (b/a) + \delta$, $I_0 = \epsilon$, com δ, ϵ positivos e pequenos, mostre que, em primeira aproximação, existem $(b/a) - \delta$ susceptíveis que escapam à infecção.