MECÂNICA RACIONAL
PROBLEMAS PARA AS AULAS PRÁTICAS

JORGE BUESCU

Resumo. Problemas sobre Mecânica Hamiltoniana.

3.1 Considere um ponto material de massa m condicionado a mover-se sobre a superfície de um cilindro (infinito) de raio R e ligado à origem por uma mola com constante elástica k.

a) Mostre que o Lagrangiano é dado, em coordenadas polares, por

$$L = \frac{1}{2}m((R\dot{\theta})^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2}k(R^2 + z^2).$$

b) Passe do formalismo Lagrangiano para o Hamiltoniano: determine os momentos conjugados, o Hamiltoniano, e escreva as equações de Hamilton do sistema. Haverá movimentos oscilatórios? E movimentos lineares?

3.2 As equações do movimento de uma partícula de massa m e carga e em movimento num campo magnético uniforme dirigido ao longo do eixo dos zz' podem ser obtidas a partir do Lagrangiano

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{eB}{2c}(x\dot{y} - y\dot{x})$$

(veja o problema 2.9).

a) Determine os momentos p_x, p_y, p_z conjugados respectivamente a x, y, z.
b) Determine o Hamiltoniano do sistema, exprimindo-o primeiro em função de $(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ e depois em termos das variáveis canónicas (x, y, z, p_x, p_y, p_z).
c) Determine os parêntesis de Poisson $[m\dot{x}, m\dot{y}]$ e $[m\dot{x}, H]$. A que é igual este último?

3.3 Considere o Hamiltoniano com um grau de liberdade $H(q,p) = \dfrac{p^2}{2m}e^{-q/a}$ para uma partícula de massa m ($a > 0$).

a) Resolva o sistema para $q(t)$ e $p(t)$. Mostre que, se o espaço de fase é restrito ao semiplano $p > 0$, o sistema tem o comportamento de uma partícula sujeita a uma força retardadora proporcional a $\dot{q}^2$. Construa o movimento correspondente às condições iniciais $q(0) = 0$, $p(0) = mv$, onde $v > 0$. Encontre os limites assimptóticos de q, p e $\dot{q}$ quando $t \to +\infty$. Qual é a relação de H com a energia cinética $T = 1/2mv^2$? A que taxa é dissipada T?
b) Que termo deve ser somado ao Hamiltoniano para proporcionar uma força adicional positiva constante?

3.4 Considere um sistema com Hamiltoniano $H(p,q) = 5q^2 + 7p$ e a mudança de variáveis $g : (q,p) \mapsto (Q,P) = (q, 8p^3)$. Mostre que g não preserva a estrutura hamiltoniana, isto é, g não é uma transformação de contacto.

3.5 Determine constantes α, β por forma a que a transformação $g : (q,p) \mapsto (Q,P) = (q + \alpha p, p + \beta q)$ preserve área.

3.6 A transformação do plano no plano correspondente à mudança de coordenadas polares para coordenadas cartesianas é canónica ou não? Justifique.

3.7 Mostre que a função geradora $F_3(p,Q) = -(e^Q - 1)^2 \tan p$ gera a transformação canónica

$$\begin{cases} Q &= \log(1 + \sqrt{q}\cos p) \\ P &= 2(1 + \sqrt{q}\cos p)\sqrt{q}\sin p. \end{cases}$$

3.8 Seja $F_1(q,Q) = qe^Q$ a função geradora de uma transformação canónica $g : (q,p) \mapsto (Q,P)$. Determine g e g^{-1}. Se o Hamiltoniano original é $H(q,p) = \frac{1}{2}(p^2+q^2)$, determine as equações de Hamilton nas novas variáveis.

3.9 Utilize o facto de a matriz jacobiana ser simpléctica para verificar se as seguintes funções podem ou não ser utilizadas como funções geradoras:

$$F_1(q,Q) = qe^Q, \qquad F_1(q,Q) = q^2 + Q^4.$$

Para os casos em que se trate de uma função geradora, determine a transformação canónica correspondente.

3.10 Considere a transformação

$$Q = \log\left(\frac{\sin p}{q}\right), \qquad P = q\cot p.$$

a) Determine o parêntesis de Poisson $[Q,P]$. A transformação é canónica?
b) Mostre que $p\,dq - P\,dQ = d(pq + q\cot p))$.
c) Construa explicitamente a função geradora $F_1(q,Q)$. Nota: $\int \arcsin x\,dx = \sqrt{1-x^2} + x\arcsin x$.

3.11 Determine $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de forma a que a mudança de variáveis $(q,p) \mapsto (f(q)\sin p, f(q)\cos p)$ seja canónica.

3.12 Seja

$$Q^1 = (q^1)^2, \quad Q^2 = q^1 + q^2, \quad P_\alpha = P_\alpha(q,p),\ \alpha = 1,2$$

uma transformação canónica a dois graus de liberdade.

a) Complete a transformação construindo as expressões mais gerais para os P_α.
b) Encontre uma escolha particular dos P_α que reduza o Hamiltoniano

$$H = \left(\frac{p_1 - p_2}{2q_1}\right)^2 + p_2 + ((q^1 + q^2)^2$$

a

$$K = P_1^2 + P_2.$$

Utilize este facto para resolver para os $q^\alpha(t)$.

Dep. Matemática, FCUL, Portugal
E-mail address: `jbuescu@ptmat.fc.ul.pt`