Faculdade de Ciências, UL
Departamento de Matemática

2^{o} EXAME DE NÚMEROS E FUNÇÕES

6 de Fevereiro de 2010 Duração: 3h

Obs.: em todo o enunciado $\log x$ designa $\log_e x \equiv \ln x$.

(1) Considere a função real de variável real f cujo gráfico está abaixo representado. Indique, por análise desse gráfico:
a) o domínio de f;
b) o contradomínio de f;
c) os zeros de f;
d) os intervalos onde f é crescente e onde f é decrescente;
e) se f é ou não injectiva no seu domínio;
f) um intervalo onde f seja invertível.

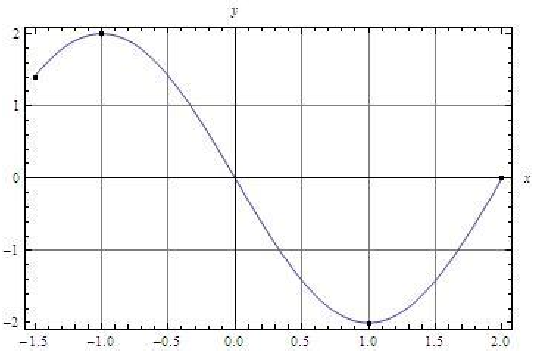

Figura 1. Gráfico da função f.

(2) Considere em $\mathbb{R}$ as seguintes inequações:

$$\frac{2x-5}{x^2-4} \geq 1 \qquad \text{e} \qquad |x-2| > |x|.$$

a) Indique o conjunto solução de cada condição.
b) Indique o conjunto dos números reais x tais que:
b.1) verificam ambas as condições;
b.2) verificam pelo menos uma das condições;
b.3) não verificam nenhuma das inequações dadas.

(3) Calcule, se existir, o limite de cada uma das seguintes sucessões:

$$a_n = \frac{n^2+1}{5n^3+n+1}, \;\; b_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n}, \;\; c_n = \frac{n^2+3}{1+5n}, \;\; d_n = \frac{e^n}{2 \cdot 3^n + 3 \cdot 2^n}.$$

(4) Calcule, se existirem, os limites de cada uma das seguintes funções reais de variável real:
a) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$;
b) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{2x+1}{x^2}$;
c) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$.

(5) Considere a função real de variável real definida por

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 3x + 2}$$

.

a) Determine o seu domínio $D(f)$ e estude a continuidade de f no seu domínio.
b) A função f admite prolongamento por continuidade a algum(ns) ponto(s) não pertencentes a $D(f)$? Em caso afirmativo determine esse prolongamento.

(6) Enuncie o Teorema do Valor Intermédio para funções contínuas. Utilize-o para mostrar que, para qualquer valor real de a, a equação

$$x^7 + x + a = 0$$

possui uma solução em $\mathbb{R}$.

(7) Justifique que cada uma das seguintes funções é diferenciável no seu domínio e calcule a respectiva derivada:
a) $f(x) = x^3\sqrt{x^2+1}$.
b) $g(x) = \log(1 + x^6)$.
c) $h(x) = e^{1/x}(x^3 + 2)$.

(8) Estude a função $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$, tendo em especial atenção o domínio, zeros, intervalos de monotonia, extremos locais, assímptotas e concavidades. Com base neste estudo esboce o gráfico de f.