

Números e Funções

Uma resolução do 1º Teste - 12. Novembro.2009

1. Considere em \mathbb{R} as seguintes condições

$$\frac{2-x}{x+4} > 2 \quad e \quad |x-2| > |x|$$

a) Indique o conjunto solução de cada condição.

$$\begin{aligned} \frac{2-x}{x+4} > 2 &\Leftrightarrow \frac{2-x}{x+4} - 2 > 0 \Leftrightarrow \frac{2-x-2x-8}{x+4} > 0 \Leftrightarrow \frac{-3x-6}{x+4} > 0 \Leftrightarrow -3\frac{x+2}{x+4} > 0 \\ &\Leftrightarrow (x+2 > 0 \wedge x+4 < 0) \vee (x+2 < 0 \wedge x+4 > 0) \Leftrightarrow (x > -2 \wedge x < -4) \vee (x < -2 \wedge x > -4) \Leftrightarrow x \in]-4, -2[. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |x-2| > |x| &\Leftrightarrow x-2 > |x| \vee x-2 < -|x| \Leftrightarrow |x| < x-2 \vee |x| < 2-x \\ &\Leftrightarrow (x < x-2 \wedge x > 2-x) \vee (x < 2-x \wedge x > x-2) \Leftrightarrow (0 < -2 \wedge x > 1) \vee (x < 1 \wedge 0 > -2) \Leftrightarrow x \in]-\infty, 1[\text{ (pois } 0 < -2 \text{ é} \\ &\text{condição impossível e } 0 > -2 \text{ é condição universal)}. \end{aligned}$$

b) Indique o conjunto dos números reais x tais que:

b.1) verificam ambas as condições;

$$]-4, -2[\cap]-\infty, 1[=]-\infty, -2[\text{ (por exemplo).}$$

b.2) verificam pelo menos uma das condições;

$$]-\infty, 1[\text{ (por exemplo).}$$

b.3) verificam apenas uma das inequações dadas.

$$]-\infty, 1[\setminus]-4, -2[=]-\infty, -4[\cup]-2, 1[\text{ (por exemplo).}$$

2. Considere as seguintes funções reais de variável real

$$f(x) = x^2 - 3x \quad e \quad g(x) = \frac{x+3}{2-x}$$

a) Mostre que f não é injectiva.

$f(0) = f(3) = 0$ e $0 \neq 3$, donde f não é injectiva.

b) Mostre que g é invertível e determine a sua inversa.

g é injectiva se, $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{2\} = D_g$, $g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

$$g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow \frac{x_1+3}{2-x_1} = \frac{x_2+3}{2-x_2} \Rightarrow (x_1+3)(2-x_2) = (x_2+3)(2-x_1),$$
$$x_1, x_2 \neq 2 \Rightarrow 2x_1 - x_1x_2 + 6 - 3x_2 = 2x_2 - x_1x_2 + 6 - 3x_1 \Rightarrow$$
$$5x_1 = 5x_2 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Logo g é injectiva, donde g é invertível.

$$g^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{2\} \quad e \quad g^{-1}(x) = \frac{2x-3}{x+1}.$$

c) Defina $f \circ g^{-1}$ e calcule $(f \circ g^{-1})(-5)$.

$$f \circ g^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f \circ g^{-1}(x) = f\left(\frac{2x-3}{x+1}\right) = \left(\frac{2x-3}{x+1}\right)^2 - 3\left(\frac{2x-3}{x+1}\right) = \dots = \frac{-2x^2-9x+18}{(x+1)^2}$$

$$f \circ g^{-1}(-5) = \frac{-2(-5)^2-9(-5)+18}{(-5+1)^2} = \frac{13}{16}.$$

3. Calcule o domínio da função real de variável real $h(x) = \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2-5x+6}} - 1$.

$$D_h = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x^2-1}{x^2-5x+6} - 1 \geq 0 \wedge x^2 - 5x + 6 \neq 0\}$$

$$\frac{x^2-1}{x^2-5x+6} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-1-x^2+5x-6}{(x-3)(x-2)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{5x-7}{(x-3)(x-2)} \geq 0 \Leftrightarrow (5x-7 \geq 0 \wedge (x-3)(x-2) > 0) \vee (5x-7 \leq 0 \wedge (x-3)(x-2) < 0) \Leftrightarrow [x \geq \frac{7}{5} \wedge ((x-3 > 0 \wedge x-2 > 0) \vee (x-3 < 0 \wedge x-2 < 0))] \vee [x \leq \frac{7}{5} \wedge ((x-3 < 0 \wedge x-2 > 0) \vee (x-3 > 0 \wedge x-2 < 0))] \Leftrightarrow [x \geq \frac{7}{5} \wedge ((x > 3 \wedge x > 2) \vee (x < 3 \wedge x < 2))] \vee [x \leq \frac{7}{5} \wedge ((x < 3 \wedge x > 2) \vee (x > 3 \wedge x < 2))] \Leftrightarrow (x \geq \frac{7}{5} \wedge (x > 3 \vee x < 2)) \vee (x \leq \frac{7}{5} \wedge (x < 3 \wedge x > 2)) \Leftrightarrow x \in [\frac{7}{5}, 2[\cup]3, +\infty[.$$

$$\text{Assim, } D_h = [\frac{7}{5}, 2[\cup]3, +\infty[.$$

4. a) Calcule, se existir, o limite das seguintes sucessões

$$a_n = \frac{n+3}{1-2n} = \frac{1+\frac{3}{n}}{\frac{1}{n}-2} \longrightarrow \frac{1+0}{0-2} = -\frac{1}{2}$$

$$b_n = \frac{2n^2+1}{4n^3+5n^2+2} = \frac{\frac{2}{n} + \frac{1}{n^3}}{4 + \frac{5}{n} + \frac{2}{n^3}} \longrightarrow \frac{0+0}{4+0+0} = 0$$

$$c_n = \frac{n^2}{n+1} = \frac{1}{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} \longrightarrow \frac{1}{0+0} = +\infty$$

$\frac{-1}{n+1} \leq d_n = \frac{(-1)^n}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$, $\frac{-1}{n+1} \longrightarrow 0$ e $\frac{1}{n+1} \longrightarrow 0$, donde, pelo Teorema das sucessões enquadradas $\frac{(-1)^n}{n+1} \longrightarrow 0$

$$e_n = \frac{2^n+1}{3^n+1} = \frac{(\frac{2}{3})^n + \frac{1}{3^n}}{1 + \frac{1}{3^n}} \longrightarrow \frac{0+0}{1+0} = 0 \text{ (pois } 0 < \frac{2}{3} < 1\text{)}.$$

b) Classifique a sucessão $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ quanto à sua monotonia.

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{(n+1)+3}{1-2(n+1)} - \frac{n+3}{1-2n} = \frac{n+4}{1-2n-2} - \frac{n+3}{1-2n} = \frac{n+4}{-2n-1} - \frac{n+3}{1-2n} = \\ &= \frac{(n+4)(1-2n) - (n+3)(-1-2n)}{(-2n-1)(1-2n)} = \frac{7}{(-2n-1)(1-2n)} > 0, \forall n \in \mathbb{N} \text{ (} 1-2n < 0 \Leftrightarrow \\ &n > \frac{1}{2} \text{ e } -1-2n < 0 \Leftrightarrow n > -\frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}\text{)}. \end{aligned}$$

Assim, $a_{n+1} - a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow a_{n+1} > a_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Logo $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão estritamente crescente.